Université d'Evry-Val d'Essonne | **Licence Physique-Chimie, 2ème année**
2eme semestre 2020/2021 | **Mathématiques 3**

TD 1 : Espaces de probabilité

Exercice 1.
Donner l'univers associé aux expériences aléatoires suivantes et préciser si ce sont des expériences équiprobables :

a) En jouant à pile ou face, compter le nombre de lancers jusqu'à l'obtention de pile.
b) Trois candidats, X, Y et Z, se présentent à une élection. On choisit trois électeurs au hasard et on note leurs intentions de vote.
c) Taper au hasard un code composé des trois lettres X, Y et Z.
d) Evaluer le nombre quotidien de gens entrant dans un magasin.
e) Evaluer la recette mensuelle d'un magasin qui a 15000 euros de marchandise en stock.
f) Evaluer la variation quotidienne du cac 40.

Exercice 2.
Donner les ensembles correspondant aux évènements A, B, A^c, $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \backslash B$ associés aux expériences aléatoires précédentes :

a) $A =$"On obtient pile lors d'un lancer pair" et $B =$"On obtient pile en moins de trois lancers".
b) $A =$"Plus de la moitié des sondés ont l'intention de voter pour un candidat" et $B =$"Au moins un sondé a l'intention de voter pour Le candidat X ".
c) $A =$"Le code comporte au moins une répétition" et $B =$"Le code comporte au moins une fois la lettre X".
d) $A =$"moins de 50 personnes sont entrées" et $B =$"Plus de 30 personnes sont entrées".
e) $A =$"La recette est comprise entre 10000 et 13000 euros" et $B =$"la recette est de 11000 euros".
f) $A =$"Le cac 40 est descendu de plus de 1%" et $B =$"Le cac 40 est monté de plus de 1%".

Exercice 3.
Soient A et B des évènements tels que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Trouver les probabilités de : $A \cup B$; A^c ; B^c ; $A^c \cap B$; $A \cup B^c$; $A^c \cap B^c$.

Exercice 4.
A la sortie d'une chaîne de montage automobile, 80% des voitures n'ont pas de défauts. 15% ont la carrosserie abîmée et 8% ont un pneu endommagé. Si une voiture est choisie au hasard à la sortie de la chaîne, quelle est la probabilité que

a) sa carosserie soit abîmée ou qu'un de ses pneu soit endommagé ?
b) sa carosserie soit abîmée et qu'un de ses pneu soit endommagé ?

Exercice 5.
Un client du rayon costumes d'un magasin achètera un costume avec une probabilité 0,22, une chemise avec une probabilité 0,30 et une cravate avec une probabilité 0,28. Le client achètera un costume et une chemise avec une probabilité 0,11, un costume et une cravate avec une probabilité 0,14 et une chemise et une cravate avec une probabilité 0,10. Un client achètera les trois vêtements avec une probabilité 0,06. Quelle est la probabilité qu'un client n'achète aucun vêtement ?

TD 2

Exercice 1
Quelle est la probabilité de tirer au moins un 6 lorsqu'on jette un dé quatre fois ?

Exercice 2
On répète *n* fois le lancer de deux dés. Calculer la probabilité pour que le six apparaisse au moins une fois. Quelle valeur donner à *n* pour que cette probabilité atteigne ½ ?

Exercice 3
Une personne dispose de 15 000 euros à investir sur quatre placements potentiels. Chaque mise doit se monter à un nombre entier de milliers d'euros. Quel est le nombre de stratégies à disposition si cette personne décide d'investir la totalité des 15000 euros ? Qu'en est-il si on admet qu'elle peut aussi investir une partie seulement de la somme ?

Exercice 4
Un sac contient 26 jetons reprenant les 26 lettres de l'alphabet dont 20 consonnes et 6 voyelles.

1) On tire *simultanément* 5 jetons du sac. Déterminer le nombre de tirages distincts :
    a) contenant exactement deux voyelles.
    b) contenant au moins une voyelle.
2) On tire *successivement* 5 jetons avec remise. Déterminer le nombre de tirages distincts :
    a) contenant exactement deux voyelles.
    b) contenant au moins une voyelle.
    c) contenant au moins deux lettres identiques.

Exercice 5
On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (éventuellement répétées le même nombre de fois). Par exemple REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS, on considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

a) Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?
b) Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?
c) Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?
d) Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 6
Un camp d'adolescents propose des stages d'activités nautiques pour débutants avec au choix: planche à voile, plongée ou ski nautique. Lors d'un stage donné, ce camp accueille vingt jeunes dont sept seront initiés à la planche à voile, huit à la plongée et cinq au ski nautique. Chaque stagiaire ne pratique qu'une seule des trois activités. On forme un groupe de 3 stagiaires choisis au hasard parmi les vingt.

a) Combien de groupes est-il possible de former ?
b) Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants:
    A : ”les trois stagiaires pratiquent des activités différentes”
    B : ”les trois stagiaires pratiquent la même activité”
    C : ”au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique”.

TD 3 : Probabilité conditionnelle et indépendance

Exercice 1.
Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation. Au vu de son expérience le commercial estime que :

- la probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à 0,25 ;
- si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;
- si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25. On note A l'événement : "le premier client achète le produit". On note B l'événement : "le deuxième client achète le produit".

a) Calculer la probabilité de l'événement B.
b) Quelle est la probabilité qu'un seul des clients conclut l'achat ?

Exercice 2.
Un test cytologique est réputé faire un test diagnostic exact avec une probabilité de 0,95. Ceci signifie qu'une personne malade a une probabilité 0,95 d'être diagnostiquée, tandis qu'une personne indemne a une probabilité 0,95 d'être rassurée par un test négatif.
On sait de plus que la maladie concerne 0,05 % de la population.
Calculer la probabilité pour qu'une personne soit atteinte par la maladie si son test est positif.

Exercice 3.
On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'événement A est : "tirer un multiple de 3"
L'événement B est : "tirer un numéro impair"
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4.
Parmi 100 dés cubiques, 25 sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit 0.5 et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. On prend un dé au hasard parmi les 100 et on le lance deux fois de suite.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 12 ?
b) On obtient 12. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
c) On obtient 2. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas pipé ?

TD 4 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1.
Quatre bus transportent 150 supporters pour un match de football. Les bus transportent respectivement 40, 35, 25 et 50 supporters. On choisit un supporter et un chauffeur au hasard et on note X le nombre de passagers dans le bus du supporter et Y celui dans le bus du chauffeur.

a) Donner les lois de X et Y.
b) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 2.
Une compagnie d'assurance automobile a remarqué que la probabilité qu'un assuré ait n sinistres en un an est proportionnelle à 0.1^n. De plus, si l'automobile de l'assuré vaut N euros, pour chaque sinistre la probabilité que le coût du sinistre soit de k euros est égale à

$$\binom{N+1}{k}\frac{3^k}{4^{N+1}},$$

indépendamment du nombre de sinistres annuels. On note X le nombre de sinistres de l'assuré en un an et Y_N le cout de chaque sinistre.

a) Quelle est la loi de X ?
b) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y_N]$.
c) Quelle prime annuelle la compagnie doit-elle faire payer au conducteur d'une voiture de 10000 euros ?

Exercice 3.
Deux agents immobiliers A et B doivent louer deux appartements identiques dont les loyers mensuels respectifs sont 1000 et 800 euros. Si ils concluent l'affaire, ils touchent l'équivalent d'un loyer et une visite leur prend 1 heure. La probabilité qu'un client ne prenne aucun des trois appartements est 0.5.
L'agent A commence par le plus cher et continue les visites dans l'ordre décroissant des loyers. On note p la probabilité que le client loue le premier appartement. La probabilité que le client le refuse mais accepte le second est $2p$.
L'agent B commence par le moins cher et continue les visites dans l'ordre croissant des loyers. On note q la probabilité que le client loue le premier appartement. La probabilité que le client le refuse mais accepte le second est $q/2$.
On note respectivement X et Y les salaires horaires des agents A et B

a) En fonction de p et q, quelles sont les lois de X et Y ?
a) Quelles sont les valeurs de p et q ?
b) Quelle est la meilleure stratégie ?

TD 5 : Variables aléatoires discrètes (suite)

Exercice 1.
Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués. Le jeu suit les règles suivantes :

- Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points.
- Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.
- Dans les autres cas il gagne 15 points.

Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus par lui.

a)) Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance et l'écart type de X.

Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.

b) Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y ?
c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?
d) Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?

Le joueur joue n parties de suite.

e) Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ?
f) Combien de fois devra-t-il jouer pour que sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Exercice 2.
Soit X la variable aléatoire égale à la variation quotidienne de la valeur d'une action exprimée en euros. On suppose que X suit la loi suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(X = k) = \frac{a}{2^{|k|}}, \quad \text{avec } a > 0.$$

On suppose que les variations quotidiennes sont indépendantes.

a) Calculer a.
b) Supposons que l'on détienne pour 100 euros d'action. On note Y_n notre richesse au bout de n jours de cotation. Donner la fonction génératrice, l'espérance et la variance de Y_1.
c) Donner la fonction génératrice, l'espérance et la variance de Y_n.

TD 6 : Variables aléatoires discrètes (suite et fin)

Exercice 1.

Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 2, c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}.$$

a) Calculer la fonction génératrice de N.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T = \sum_{k=1}^{n} N_k$ où les N_k sont indépendants et de même loi que N. Calculer la fonction génératrice de T.
c) En déduire son espérance et sa variance.
d) Quelle est la loi de T ? En déduire $P(T \leq 3)$ lorsque $n = 4$.

Exercice 2.

Le nombre d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité qu'un oeuf se développe est p. On suppose que les oeufs se développent indépendamment les uns des autres.

1) Quelle est la loi de probabilité du nombre Y_1 de descendants d'un insecte donné ?
2) Quelle est la loi de probabilité du nombre Y_N de descendants dans la N ième génération d'un insecte donné

Exercice 3.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant une loi géométrique de paramètre p. On note $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1) Donner l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$.
2) Exprimer $X_1 + X_2$ et $\mid X_1 - X_2 \mid$ en fonction de T et Z.
3) Démontrer que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{p}{2-p}$.

Exercice 4.

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort 3 sujets et choisissent l'un d'eux pour le traiter. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1) Définir une variable aleéatoire associée à ce probleème et donner sa loi de probabilité.
2) Quelle est son espérance et sa variance ?
3) Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés,
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets,
   (c) aucun des trois sujets.

TD 7 : Densité, fonction de répartition

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ xe^{-x^2/2} \text{ sinon} \end{cases}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

Exercice 2.
On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue X. Donner une densité de X.

Exercice 3.
Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F avec :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{x}{2})e^{-x/2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la densité de probabilité de X.

Exercice 4.
Comme chacun sait, la durée de vie d'une savonette (en jours) est une variable aléatoire réelle dont la loi admet une densité :

$$f(t) = \lambda^2 te^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

Une longue expérience indique que la moyenne $E(T)$ est de 20 jours.
a) Calculer le paramètre λ.
b) Calculer la fonction de répartition de T.

Exercice 5.
Soit X une variable aléatoire continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité f. Soit $Y = |X|$.
Donner, en fonction de f, la loi de Y.

TD 8 : Lois usuelles

Exercice 1.

1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X est une variable aléatoire "sans mémoire", c'est à dire qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \ P_{\{X>x\}}\left(X > x+y\right) = P(X > y).$$

2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^+$, X vérifie la propriété suivante

$$P_{\{X>x\}}\left(X > x+y\right) = P(X > y).$$

 a) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(x) = P(X > x)$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \ g(x+y) = g(x)g(y).$$

 b) En déduire que g est solution d'une équation différentielle linéaire.
 c) Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre $-g'(0)$.

Exercice 2.
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ telle que

$$P(X \leq 240) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X \geq 250) = \frac{1}{3}.$$

Déterminer les valeurs de m et σ.

Exercice 3.
On a estime que 1400 usagers cherchent, le vendredi soir, à prendre le TGV Paris-Nantes de 19h30. Les portes du train ouvrent une demi- heure avant le départ. Parmi les usagers, 50 arrivent avant l'ouverture des portes et 70 arrivent trop tard.
On supposera que la loi des temps d'arrivée est gaussienne.

a) Utiliser les tables pour obtenir la moyenne et l'ecart-type de cette loi.
b) Déterminer l'heure à laquelle les portes du train doivent être ou- verte pour qu'il n'y ait pas plus de 20 usagers qui attendent sur le quai ?
c) Calculer le nombre de voyageurs ayant manqué le train si celui-ci a un retard de 5 minutes ?

Exercice 4.
On suppose que le rendement d'un portefeuille (en %) est une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(5, 2)$.

a) Calculer la probabilité d'avoir un rendement négatif.
b) Déterminer un intervalle I centré sur 5 tel que $P(X \in I) = 0.98$.

Exercice 5.
Une entreprise fabrique des machines. Le nombre de machines fabriquées chaque jour suit une loi normale. Au cours des 700 derniers jours, plus de trente machines ont été fabriquées au cours de 589 jours différents alors que seulement pendant 16 jours, plus de 90 machines ont été fabriquées.

a) Quelle est la fabrication moyenne par jour de machines et quel est l'écart-type ?
b) Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0.99 pour le nombre de machines fabriquées quotidiennement.

Exercice 6.
Un fabriquant décide de sélectionner 10% de sa production pour en faire des articles de qualité. Sa production suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart-type 4. Quelle est la valeur du seuil à partir duquel un élément de la production est sélectionné pour être transformé en produit de qualité ?

Table de la loi normale centrée réduite

La fonction de répartition de la loi normale centré réduite est définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

La table indique la valeur de $F(x)$ pour $x \geq 0$. Pour $x < 0$, $F(x) = 1 - F(-x)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9^303	0.9^306	0.9^310	0.9^313	0.9^316	0.9^318	0.9^321	0.9^324	0.9^326	0.9^329
3.2	0.9^331	0.9^334	0.9^336	0.9^338	0.9^340	0.9^342	0.9^344	0.9^346	0.9^348	0.9^350
3.3	0.9^352	0.9^353	0.9^355	0.9^357	0.9^358	0.9^360	0.9^361	0.9^362	0.9^364	0.9^365
3.4	0.9^366	0.9^368	0.9^369	0.9^370	0.9^371	0.9^372	0.9^373	0.9^374	0.9^375	0.9^376
3.5	0.9^377	0.9^378	0.9^378	0.9^379	0.9^380	0.9^381	0.9^381	0.9^382	0.9^383	0.9^383
3.6	0.9^384	0.9^385	0.9^385	0.9^386	0.9^386	0.9^387	0.9^387	0.9^388	0.9^388	0.9^389
3.7	0.9^389	0.9^390	0.9^400	0.9^404	0.9^408	0.9^412	0.9^415	0.9^418	0.9^422	0.9^425
3.8	0.9^428	0.9^431	0.9^433	0.9^436	0.9^438	0.9^441	0.9^443	0.9^446	0.9^448	0.9^450
3.9	0.9^452	0.9^454	0.9^456	0.9^458	0.9^459	0.9^461	0.9^463	0.9^464	0.9^466	0.9^467

La table retourne la valeur de $F(x)$ pour la valeur x lue comme la somme des valeurs figurant en tête de la ligne et de la colonne correspondante.
Exemple : Si $x = 0.64 = 0.6 + 0.04$, $F(x) = 0.7389$.

La notation 0.9^389, par exemple, équivaut à 0.99989.

Université d'Evry-Val d'Essonne **Licence Physique-Chimie, 2ème année**
2^{eme} semestre 2020/2021 **Mathématiques 3**

TD 9 : Couples de variables aléatoires

Exercice 1.

La loi de probabilité du couple de variables aléatoires (X, Y) est donnée par

(X,Y)	0	1	2	3
0	2/48	6/48	3/48	1/48
2	4/48	12/48	6/48	2/48
4	2/48	6/48	3/48	1/48

a) Donner les lois marginales du couples (X, Y).
b) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur A. Pour chacun des cas suivants donner les lois marginales du couples et étudier l'indépendance de X et Y.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 2x \text{ et } y \leq 6 - x\}$.
b) $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 :\ x \geq y + 1/2 \text{ ou } x \leq y \leq x + 1/2\}$.
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 3.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoire admettant comme densité la fonction suivante :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(2x + y)\, \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,2]}(x, y).$$

a) Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \in [0, 1]), \quad \mathbb{P}(Y \leq 1), \quad \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2},\ Y \geq 1\right), \quad \mathbb{P}(X + Y \leq 1).$$

b) Donner les lois marginales du couples (X, Y).
c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une fonction de densité f. Pour chacun des cas suivants calculer les lois marginales du couples (X, Y) et étudier l'indépendance de X et Y.

a) $f(x, y) = xe^{-x(1+y)}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[^2}(x, y)$.
b) $f(x, y) = 60xy^2$ pour $x, y \geq 0$ et $x + y \leq 1$ et $f(x, y) = 0$ sinon.