Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite réelle.

(1) Supposons que $\sum a_n$ est semi-convergente, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ a_n \geq 0\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ a_n < 0\}$

(*a*) Montrer que $A$ et $B$ sont infinis

Soit $\sigma$ définie par récurrence :

— $\sigma(0) = 0$

— $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n+1) = \begin{cases} \min A\backslash\{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} & \text{si } \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \alpha \\ \min B\backslash\{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} & \text{si } \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} > \alpha \end{cases}$

(*b*) Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$

(*c*) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$ (hint : montrer d'abord que $a_{\sigma(n)} \to 0$)

(2) Supposons que $\sum a_n$ est absolument convergente

(*a*) Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \sum a_{\sigma(n)}$ converge absolument

(*b*) Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

(1) Soit $K$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, de cardinal $q$. Soit $a \in K$.

(*a*) Montrer que $\prod\limits_{x\in K\backslash\{0\}} x = -1$ (hint : considérer la relation $x \ R \ y \Leftrightarrow y = x$ ou $y = x^{-1} \dots$)

(*b*) Montrer que : $a$ est un carré $\Rightarrow a^{(q-1)/2} = 1$

(*c*) Montrer que : $a$ n'est pas un carré $\Rightarrow a^{(q-1)/2} = -1$ (hint : considérer la relation $x \ S \ y \Leftrightarrow y = x$ ou $y = ax^{-1} \dots$)

(2) Soit $p$ premier. On veut montrer que : $\exists x, y \in \mathbb{N}, p = x^2 + y^2$ ssi $p = 2$ ou $p \equiv 1(\text{mod } 4)$

(*a*) Montrer le sens direct

(*b*) Montrer que $p \equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, a^2 = -\overline{1}$

(*c*) Montrer que $p \equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow \psi : (x,y) \in [\![0, \lfloor\sqrt{p}\rfloor]\!]^2 \mapsto \overline{x} - a.\overline{y} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est non-injective

(*d*) conclure

(1) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$

(*a*) Donner une relation entre $I_n$ et $I_{n+2}$, en déduire $I_{2n+1}$

(*b*) Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (hint : considérez la suite $(nI_nI_{n-1})_n \dots$)

(2) Soit $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$

(*a*) Montrer que $(u_n)_n$ converge vers un réel $\lambda > 0$

(*b*) En déduire que $!n \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (hint : regarder $\frac{u_n^2}{u_{2n}} \dots$)

(1) Pour $x \in \mathbb{Q}$, notons $(p(x), q(x)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ l'unique couple d'entiers tels que $x = p(x)/q(x)$ et $p(x) \wedge q(x) = 1$.
Montrer que $\forall a \leq b, \forall N \in \mathbb{N}^*, \{x \in \mathbb{Q} \ : \ q(x) \leq N, \ x \in [a,b]\}$ est fini.

(2) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q(x)} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que l'ensemble des points de continuité de $f$ est exactement $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $X_n(a,b) = |\{1 \leq k \leq n \ : \ u_k \in [a,b]\}|$ Montrer que LASSE :

(*i*) $\forall 0 \leq a \leq b \leq 1, \frac{X_n(a,b)}{n}$ converge vers $b - a$

(*ii*) $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(u_k) \to \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que $\forall k, \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \frac{1}{n}\int_a^b f$

(2) Calculer la limite de $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)$