Questions de cours possibles :
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, positive d'intégrale nulle, montrer que $f = 0$
- Montrer que reste intégrale implique inégalité Taylor-Lagrange
- relation de Chasles

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0, 1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $X_n(a, b) = |\{1 \leq k \leq n \ : \ u_k \in [a, b]\}|$ Montrer que LASSE :
(i) $\forall 0 \leq a \leq b \leq 1$, $\frac{X_n(a,b)}{n}$ converge vers $b - a$
(ii) $\forall f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(u_k) \to \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' = f$ et $f(0) = f'(0)$. Montrer que $f = f'$ (hint : considérez $\displaystyle\int_0^x e^t f(t)dt$)

Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues. Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 g(x)f(x)^n dx$.
(1) Montrer que $\forall n, u_{n+1}^2 \leq u_n u_{n+2}$
(2) En déduire que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, on suppose que $\exists n \geq 1, \forall 0 \leq k \leq n, \displaystyle\int_0^1 f(t)t^k dt = 0$.
Montrer que f possède au moins $n + 1$ zéros dans $[0, 1]$ (hint : calculer $\int_0^1 f(t)P(t)dt$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$)

Calculer la limite de $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue
(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall k, \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \frac{1}{n} \int_a^b f$
(2) Calculer la limite de $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)$

Calculer la limite de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b |f| = \left| \int_a^b f \right|$. Montrer que le signe de f est constant.

Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : t \mapsto e^t(\cos t)$

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1/2$. Montrer que f admet un point fixe.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique (où $T > 0$). Montrer que $\forall x, \displaystyle\int_x^{T+x} f = \int_0^T f$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $0 \leq f' \leq 1$.
Montrer que $\forall x \geq 0, \left(\displaystyle\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3$ (hint : étudier $g(x) = \left(\displaystyle\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3 \ldots$)

Calculer la limite de $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n}$